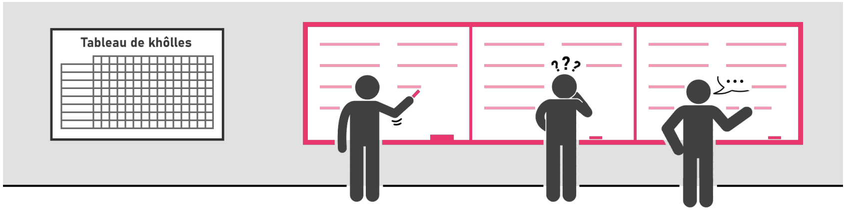

SUJETS DE COLLES 04

1. Questions de cours.

- Montrer que l'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul. Commenter chacune des étapes du raisonnement.
- Comment définit-on la dimension d'un espace vectoriel ? Pour présenter cette définition, on pourra être amené à expliquer ce qu'est une base, une famille libre, génératrice et/ou à citer un résultat du cours sur le cardinal des bases : plus il y a de détails, plus le colleur sera content
- Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire.
- Montrer que l'image et le noyau d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.
- Montrer qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
- Discuter selon la valeur de α la convergence et la valeur des intégrales
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$
- Discuter selon les valeurs de λ la convergence puis la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt.$$

2. Exercices d'application directe du cours en intégration.

Exercice 1 *Sommes de Riemann.*
Calculer la limite des suites suivantes :

1. $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

2. $S_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}$.

3. $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n+k)(\ln(2n+k)-\ln(n))}$.

4. $V_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$.

5. $W_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n}$

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\ln(2)} e^x \left(2e^x - 1\right)^2 dx$.

2. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$.

3. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$.

4. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$.

5. $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$.

6. $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$.

Exercice 3
Quelle est la nature des intégrales suivantes ?

1. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)}$.

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{1+x^2} dx$.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

3. Exercices classiques (algèbre linéaire).

Exercice 4

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

Montrer que f est linéaire, trouver une base de son image et de son noyau. L'application est-elle surjective ? injective ?

Exercice 5

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

Montrer que f est linéaire, trouver une base de son image et de son noyau. L'application est-elle surjective ? injective ?

Exercice 6

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (-2x + 2z, y - x, 3z, -4x + 4z).$$

Montrer que f est linéaire, trouver une base de son image et de son noyau. L'application est-elle surjective ? injective ?

Exercice 7

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $X \in \mathbb{R}^m$, $AX = BX$. En utilisant uniquement du calcul matriciel, montrer que $A = B$.

Exercice 8

Soit V un espace vectoriel et f une application linéaire. On suppose que $\dim(V) = 7$ et que $f \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ puis que $\mathrm{rang}(f) \leqslant 3$.

Exercice 9

Soit A une matrice carrée telle que $A^2 = A$. Peut-on en déduire que $A = 0$ ou $A = I_n$?

4. Exercices plus difficiles.

Exercice 10 *Suites des noyaux et images itérés (hors programme mais classique).*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f un endomorphisme de E.

Partie I : étude d'un exemple.

On suppose dans cette partie que E est de dimension 3.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

On suppose dorénavant que f vérifie $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2. Montrer que si $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 0$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.

Que peut-on en déduire ?

3. Montrer que si $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 2$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, puis que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Que peut-on en déduire ?

4. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f^2)$ et de $\mathrm{Ker}(f^2)$.

Partie II : noyaux et images itérés.

On revient maintenant au cas général d'un espace vectoriel de dimension quelconque n et d'une application linéaire f quelconque.

1. **a.** Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathrm{Ker}(f^i) \subset \mathrm{Ker}(f^{i+1}).$$
b. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathrm{Im}(f^{i+1}) \subset \mathrm{Im}(f^i).$$
2. Montrer, en considérant les dimensions de $\mathrm{Ker}(f^k)$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$ qu'il existe un entier $p \in \{0, \cdots, n\}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$. En déduire qu'alors $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+1})$.
3. Montrer que pour tout $k \geqslant p$, on a
$$\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^p).$$
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0\}$.

Exercice 11

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A :
$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ AM = MA\}.$$

1. **a.** Démontrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(R)$.
b. Quelle est la plus grande dimension possible pour $C(A)$?
2. On suppose dans cette seule question que $n = 2$. On note J la matrice
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
a. Trouver les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $JM = MJ$.
b. En déduire la dimension de $C(J)$.
3. On suppose dans cette question qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $(X, AX, \cdots A^{n_0}X)$ soit génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
a. On note p le plus grand entier strictement positif pour lequel la famille $(X, AX, \cdots, A^{p-1}X)$ soit libre. Montrer que $(X, AX, \cdots, A^{p-1}X)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Que vaut p ?
b. Démontrer que pour toute matrice $M \in C(A)$, il existe $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})$ tel que
$$M = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k.$$
c. En déduire la dimension de $C(A)$.

Exercice 12

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \begin{cases} x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$
a. Justifier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.
b. En déduire que la fonction $h : x \mapsto xg(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
c. La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?
2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace engendré par les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$ et g :
$$F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, g).$$
a. Pour toute fonction f de F, on note $\Phi(f)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto xf(x)$. Montrer que Φ définit un endomorphisme de F.
b. Prouver que la famille (f_0, f_1, g) est une base de F et trouver la matrice M de Φ dans cette base.
3. **a.** Montrer que M est une matrice inversible et déterminer son inverse.
b. En déduire une primitive de la fonction g.

c. Trouver une primitive de la fonction h.

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. On note Id l'endomorphisme identité de E. On suppose que f vérifie :

$$f^2 - 2f - 3\mathrm{Id} = 0.$$

1. Montrer que f est un automorphisme de E.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - 3\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{id})$.

3. Trouver deux réels α et β tels que, pour tout vecteur x de E, on ait

$$x = \alpha(f + \mathrm{Id})(x) + \beta(f - 3\mathrm{Id})(x).$$

4. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) + \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) = \{0\}$.

6. Montrer que $\mathrm{Im}(f - 3\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

7. En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})) + \dim(\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id})) = \dim(E)$.

Remarque 1. Les exercices plus avancés d'intégration feront l'objet de la quinzaine de colles suivante.